

ÉPREUVE N°2

Durée : 2 heures – Coefficient 4

MATHÉMATIQUES

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les parties I, II, III et IV sont indépendantes.

*Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.
Les candidats seront jugés sur l'argumentation.*

-I-On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + 3e^{-x})$$

\ln est la fonction logarithme népérien et on notera \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .
(b) Justifier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, puis calculer sa dérivée.
(c) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition.
(d) \mathcal{C}_f possède-t-elle des tangentes horizontales ?
Si oui, déterminer leur(s) équation(s).

2. (a) Montrer que pour tout x appartenant à \mathcal{D}_f on a :

$$f(x) = x + \ln(1 + 3e^{-2x})$$

- (b) En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
(c) Montrer que la droite \mathcal{D} , d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout x appartenant à \mathcal{D}_f on a :

$$f(x) = -x + \ln(3 + e^{2x})$$

- (b) En déduire la limite de $f(x)$ en $-\infty$.
(c) Montrer que la droite \mathcal{D}' , d'équation $y = -x + \ln(3)$, est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$.
4. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f .
On prendra soin de placer la(les) tangente(s) horizontale(s) et les asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f avant d'effectuer le tracé.

5. (a) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\int_0^\alpha e^{-2t} dt < \frac{1}{2}$$

- (b) Montrer que pour tout réel $s > 0$ on a :

$$\ln(1 + s) < s$$

- (c) En déduire que pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\int_0^\alpha \ln(1 + 3e^{-2t}) dt < \frac{3}{2}$$

- (d) Soit α un réel strictement positif.

Que peut-on dire de l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la droite \mathcal{D} , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$?

-II-

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t) dt$$

Déterminer I et J en utilisant leur somme et leur différence.

-III-

La « petite-rose » est une maladie qui sévit au Barbour. La probabilité d'en être atteint est égale à 0,001.

Un unique test de dépistage existe et permet de détecter 80 % des personnes atteintes mais désigne également à tort comme malade 0,02 % des personnes dépistées.

Un unique traitement existe.

Une personne atteinte et non traitée a une chance sur deux de survivre et une personne atteinte et traitée neuf chances sur dix. Le traitement est mortel pour 1 % des personnes traitées et non atteintes.

1. Quelle est la probabilité pour un habitant du Barbour de décéder de la « petite-rose » si aucun dépistage n'est pratiqué et aucun traitement proposé.
2. Le gouvernement décide un dépistage systématique et impose le traitement à toutes les personnes déclarées atteintes.
Quelle est, dans ce cas, la probabilité qu'un habitant du Barbour décède de sa maladie ou du traitement ?

-IV-

Un dé à six faces est composé de trois faces blanches, deux faces marquées d'une étoile et une face marquée d'un joker. Ce dé est équilibré.

On lance le dé et on observe le résultat obtenu sur la face supérieure.

Si la face est marquée du joker, on gagne 20€ et le jeu s'arrête.

Si la face est marquée d'une étoile, on gagne 10€ et le jeu s'arrête.

Si la face est blanche, on relance le dé une fois et on observe à nouveau le résultat :

On gagne 100€ et le jeu s'arrête si on obtient un joker, on perd 50€ et le jeu s'arrête si on obtient une étoile et le jeu s'arrête si on obtient à nouveau une face blanche.

On note X la variable aléatoire donnant le gain ou la perte du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique de X .
3. Calculer l'écart-type de X .